~~Παράδειγμα~~ Άσκηση: Να λυθεί.

$\max -x_1 + 2x_2 - 3x_3$

$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

$2x_2 - x_3 \leq 1$

$x_2 + 2x_4 \leq 8$

$x_i \geq 0$

$\Rightarrow$

$\max \{-x_1 + 2x_2 - 3x_3\}$

$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

$2x_2 - x_3 + x_5 = 1$

$x_2 + 2x_4 + x_6 = 8$

$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 6$

1/04/19

Λύση

			-1	2	-3	0	0	0		
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	10/2	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	-	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	8/2	Γ_3
	2	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

1η λύση

P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 2\Gamma_3'$
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	$\Gamma_2' = \Gamma_2$
P_4	0	4	0	1/2	0	1	0	1/2	Γ_3'.
	2	-2	0	0	2	0	0	1	$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_3'$

2η λύση

P_1	-1	3	1	0	0	0	1	-1
P_2	2	1/2	0	1	-1/2	0	1/2	0
P_4	0	15/4	0	0	1/4	1	-1/4	1/2
	2	-2	0	0	2	0	0	1

Άρα έχει άπειρες λύσεις

$$x' = \lambda x_1' + (1-\lambda) x_2'$$
$$= \lambda (2,0,0,4,1,0)' + (1-\lambda)\left(3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0\right)$$

Παράδ 2.12 Βασιλείου

$\min(x_1 + x_2 - x_3)$

$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$

$-x_1 - 7x_2 + 2x_3 \leq 2$

$7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$

$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$-\max(-x_1 - x_2 + x_3)$

$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$

$-x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_5 = 2$

$7x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 10$

$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_7 = 6$

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_4	0	2	2	2	-1	1	0	0	0	
P_5	0	2	-1	-7	$\boxed{2}$	0	1	0	0	$\frac{2}{2}$
P_6	0	10	7	1	-1	0	0	1	0	
P_7	0	6	4	6	-2	0	0	0	0	
	2	0	1	1	-1	0	0	0	0	

	Z	P_1	P_2	P_3 ...
P_4	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
P_5	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	
P_6	0	$\frac{13}{2}$	$-\frac{5}{2}$	
P_7	0	3	-1	
		$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	

όλη η στήλη είναι αρνητική
Άρα μη φραγμένη λύση

Μ-Μέθοδος

Όταν δεν έχω το μοναδιαίο πίνακα από το αρχικό σύστημα προσθέτω μεταβλητές στο σύστημα και η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται: (π.χ με 2 τεχνητές μεταβλητές)

$-\text{maximize}\,(-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - Mx_6 - Mx_7)$ $M >>> 0$ στόχος μα είναι να βγάλω τις μεταβλητές που πρόσθεσα

Και στον καινούργιο πίνακα δεν τις υπολογίζω τις τεχν μεταβλητές

• Αν εμφανιστεί τεχνητή μεταβλητή στη λύση τότε το πρόβλημα είναι αδύνατο, αν έχει τιμή μεγαλύτερη του μηδενός

Μέθοδος 2 φάσεων

Φάση 1

Αν $a = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})$
το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών για το δοσμένο πρόβλημα, ξεκινάμε με τη λύση του προβλήματος

$\min Z_1 = 1'a$

$A\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} = b \quad , x \geq 0 , a \geq 0$

Αν $Z_1 = 0$ αρ. στη λύση του νέου Π.Γ.Π είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}$, με x^0 να είναι μια βασική εφικτή λύση του αρχικού Π.Γ.Π

Αν $Z_1 > 0$ το αρχ. ΠΓΠ δεν έχει εφικτές λύσεις

NO.

Date

Φαση 2

Λυνουμε το αρχ. προβλημα χρησιμοποιωντας ως αρχ. βασικη εφικτη λυση την βελτιστη x^0 της Φασης 1

Παραδειγμα

$\max(50x_1 + 40x_2)$

$3x_1 + 5x_2 \leq 150$

$x_2 \leq 20$

$3x_1 + 5x_2 \leq 300$

$x_1, x_2 \geq 0$

1^{os} Τροπος: Λυνεται γραφικα. Αριστη λυση $\Gamma(30, 12)$

Τιμη αντικειμ. συναρτησης: $50 \cdot 30 + 40 \cdot 12 = 1980$

2^{os} Τροπος: Αλγοριθμος Simplex

- Αν προσθεσω στο προβλημα την $x_1 + x_2 \geq 25$ (Να λυθει σαν ασκηση)

Χρησιμοποιω τεχνητη μεταβλητη

$\max(50x_1 + 40x_2 - Mx_7)$

$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 150$

$x_2 + x_4 = 20$

$3x_1 + 5x_2 + x_5 = 300$

$x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 25$

$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7$

- Αν αντι για $x_1 + x_2 \geq 25$ εχω $x_1 + x_2 \geq 50$ τοτε αδυνατο προβλημα. Δεν εχω εφικτη λυση

3 | 1
10 | A3

Άσκηση SOS εξεταστική

SOS

6	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
B	4	A_1	1	0	A_2	0
2	-1	-5	0	1	-1	0
3	A_3	-3	0	0	-4	1
10	C_1	C_2	0	0	0	0

a) Ποιες συνθήκες πρέπει να πληρούν οι αγ. παράμετροι $A_1, A_2, A_3, B, C_1, C_2$ ώστε
i) η λύση είναι άριστη αλλά υπάρχουν κι άλλες αρ. λύσεις;
ii) η λύση δεν είναι μια βασική εφικτή λύση;
iii) η λύση είναι μια β.ε.λ αλλά το π.γ.π είναι μη φραγμένο;

Λύση i) πρέπει $B \geq 0$ για να έχω εφικτότητα
Έχω πολλές περιπτώσεις (παραθέτω στο ένα τρόπο)

$A_1, A_2 > 0$
$C_2 > 0$ $C_1 = 0$ (πιο ασφαλής)
ή $C_2 = 0$ $C_1 > 0$

ii) $B < 0$ για να χαλάσω την εφικτότητα

iii) $B > 0$ και μια στήλη όλα αρνητικά άρα π.χ. $A_1 < 0$ $C_2 < 0$
$A_2 < 0$ κτλ

② Συμπληρώστε τα κενά (–)

B	C_B	b	P_1 (4)	P_2 (5/3)	P_3 (4/3)	P_4 (3)	P_5 (-1)	P_6 (0)	P_7 (-2/3)
P_5	-1	4	0	4/3	2/3	0	1	0	-1/3
P_6	0	10	0	1/3	2/3	1	0	1	-1/3
P_1	4	4	1	1/3	1/6	1/2	0	0	1/6
	z	12	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	0	0	$\frac{5}{3}$

B	C_B	b	P_1 (-1)	P_2 (2)	P_3 (-6)	P_4 (0)	P_5 (0)	P_6 (5)
P_2	2	2	-3	1	-1	-2	0	0
P_6	5	3	2	0	0	-1	0	1
P_5	0	1	6	0	7	6	1	0
	z	19	5	0	4	-9	0	0

③

B	C_B	b	P_1 (1)	P_2 (2)	P_3 (3)	P_4 (-M)
P_2	2	10	2	1	1	0
P_4	-M	20	0	0	3	1
		20-20M	3	0	-1-3M	0

Ενδιάμεσο ταμπλό που μπορώ να βρω καλύτερη λύση.

B	C_B	b	P_1 (-1)	P_2 (3)	P_3 (0)	P_4 (0)
P_3	0	0	2	1	1	0
P_4	0	5	1	2	0	1
		0	-1	-3	0	0

Υπάρχει εκφυλισμένη λύση
Μπορώ να βρω καλύτ. λύση

B	C_B	b	P_1 (8)	P_2 (-3)	P_3 (-2)	P_4 (6)
P_3	-2	5	-3	0	1	2
P_2	-3	10	0	1	0	-2
		-40	-2	0	0	-4

↳ μη φραγμένο

			9	0	0	4
		b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	0	3	1	1	0	9
P_3	0	-5	-1	0	1	0
		0	-9	0	0	-4

-5 και εφικτη λυση

			3	1	4	3
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	3	2	1	0	1	2
P_2	1	1	0	1	1	3
		7	0	0	0	1

Παρατηρω απο 3 μηδεν.
Δεν εχει μοναδικη λυση

			7	5	9	8
		b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_4	8	0	0	2	4	1
P_1	7	9	1	3	7	0
		63	0	32	72	0

Τελ. σειρα ολα θετικα
μοναδ. & εφικτη λυση

④ Εχω το αρχικο ταμπλο αλλα αφου λυνω το προβ. χανω τη λυση
Να βρεθει η λυση.

b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8			P_{11}
4	1	1	1	1	1	1	0	0			
6	2	2	-1	-3	5	0	1	0			
4	2	2	3	0	0	0	0	1			
6	-3	0	4	50	6	0	0	0	1		
9	-9	3	-3	0	-1	0	0	0		1	
4	-4	0	-2	-10	5	0	0	0			1
0	-5	-0	-5	-6	-7	0	0	0			

Παιρνω αντιστροφο των διανυσματων.

b P_1 = P_6 P_7 P_3 P_8 P_9 P_{10} P_{11}

43/24	1/24	-15/16	-1/3	0	0
5/3	1/3	-5/16	0	0	0
-43/24	-1/24	23/16	1/3	0	0
5/3	-1/3	-3/16	0	0	0
175/3	5/3	-30/16	-4	1	0
71/12	-7/12	-19/8	-4/3	0	1
1		7/2	1	0	0

$$b = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 1 \\ 24 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

Κανονική ή ημικανονική μορφή π.γ.π

Ένα πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή αν:

i) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης

ii) οι περιορισμοί είναι ανισότητες με φορά ≤

iii) όλες οι μεταβλητές μη αρνητικές

Αυτό απλώς είναι σωστή αναστροφή της μορφής

$\max c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \le b_1$ $\quad\quad \max cx$

$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \le b_2$ $\quad\quad Ax \le b$

$\vdots$ $\quad\quad \underset{\sim}{x} \ge 0$

$\alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n \le b_m$

$x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n$

Παράδειγμα

$\min 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \le 6$

$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \ge 5$

$x_1 - x_2 = 10$

$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \ge 0 \quad x_3 \le 0$

$-\max -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \le 6$

$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le -5$

$x_1 - x_2 = 10$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \le 0$

$-\max -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \le 6$

$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le -5$

$x_1 - x_2 \le 10$

$x_1 - x_2 \ge 10$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad , x_2 \ge 0 \quad , x_3 \le 0$

$-\max -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \le 6$

$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le -5$

$x_1 - x_2 \le 10$

$-x_1 + x_2 \le -10$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad , x_2 \ge 0 \quad , x_3 \le 0$

$x_1 = x_1' - x_1'' \qquad x_1', x_1'' \ge 0$

$x_3 = -x_3' \qquad , x_3' \ge 0$

$-\max -2(x_1'-x_1'')-3x_2-5x_3$

$7(x_1'-x_1'')-4x_2-x_3\leq 6$

$-2(x_1-x_1'')+3x_2-4x_3'\leq -5$

$x_1'-x_1''-x_2 \leq 10$

$-x_1'+x_1''+x_2 \leq -10$

$x_1', x_1'', x_2, x_3'' \geq 0$

Π.Γ.Π σε κανονική μορφή

$A\in \mathbb{R}_{m\times n}$ $\max c'x$

$c\in\mathbb{R}_{n\times 1}$ $Ax\leq b$ (π)

$b\in\mathbb{R}_{m\times 1}$ $x\geq 0$

Ορίζεται ως Δυϊκό πρόβλημα του δυϊκού πρωτεύοντος προβλήματος

$\min b'w$

$A'w\geq c$

$w\geq 0$ $w\in\mathbb{R}_{m\times 1}$

(Δ)

$\min b_1w_1+b_2w_2+\dots+b_mw_m$

$a_{11}w_1+a_{21}w_2+\dots+a_{m1}w_m\geq c_1$

$a_{12}w_1+a_{22}w_2+\dots+a_{m2}w_m\geq c_2$

$\vdots$

$a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\dots+a_{mn}w_m\geq c_n$

$w_i\geq 0$

Παράδειγμα

$\max 10x_1+9x_2+4x_3+6x_4$

w_1 | $3x_1+2x_2+4x_3+2x_4\leq 70$

w_2 | $5x_1+5x_2+x_3+3x_4\leq 60$

w_3 | $5x_1+6x_2+3x_3+x_4\leq 25$

$x_i\geq 0$

$$\min\ 70w_1 + 60w_2 + 25w_3$$

(Δ)

$$3w_1 + 5w_2 + 5w_3 \geq 10$$

$$2w_1 + 5w_2 + 6w_3 \geq 9$$

$$4w_1 + w_2 + 3w_3 \geq 4$$

$$2w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 6$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Παρατηρηση: Το (Δ) του (Δ) ειναι (Π)

(Π) $\max\ c'\underline{x}$

$A\underline{x} \leq \underline{b}$

$\underline{x} \geq 0$

(Δ) $\min\ \underline{b}'\underline{w}$ $\quad$ $-\max -\underline{b}'w$ $\quad$ $-\min(-\underline{c}')\underline{x}$ $\quad$ $\max\ \underline{c}'x$

$A^T w \geq \underline{c}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $-A^T \underline{w} \leq -c$ $\quad \xRightarrow{D} \quad$ $-(A^T)^T \underline{x} \geq -b \Rightarrow$ $\quad$ $A\underline{x} \leq \underline{b}$

$\underline{w} \geq 0$ $\quad$ $\underline{w} \geq 0$ $\quad$ $x \geq 0$ $\quad$ $\underline{x} \geq 0$